植物防疫基礎講座
病害虫防除のための統計学（6）

ノンパラメトリックな検定法

農林水産省林業試験場　藤田（ふじた）和幸（かずゆき）

はじめに

ノンパラメトリック統計法の紹介をテーマにした原稿の執筆を依頼されたとき，数ページのスペースにどんな内容を私なりに盛り込むことができるかを考えてみた。そこで参考にしたのは，近年出版され，よく利用されている生物学，あるいは農学のための統計学書の内容である。生物学出身の著者の手になるものも何点かある（例えば，ソーカルとロルフ，1973；石居，1975)。それらはかなりのスペースをノンパラメトリック統計法の紹介に当てており，計算のやりかたはもちろん，どんな場合に使用すればよいかということが，わかりやすく解説してある。さらに，ノンパラメトリック統計法の応用だけではなく，その理論も解説してある日本語の本も，訳書を含めて 4～5 冊は手に入る状態だし，動物行動学へのノンパラメトリック統計法の応用については私自身も参加して別の場所で述べた(粕谷・藤田，1984)。このように，ノンパラメトリック統計法の学習に関しては，自習も十分できる環境が整ってきているといえるのではないだろうか。

そんな中での本稿の主題は，ノンパラメトリック法をまだご存じない方，また一応ご存知の方を対象に，自習可能な統計学書を「見て，利用する」のではなく，なんとか，「読んで，理解する」ための糸口を作ることに置きたいと考えた。統計学を利用するためには，それぞれの方法の前提，それに伴う適用の限界がわかって使わなければならない。さらに，方法のからくりについてのある程度の知識は必須であろう。また，宮井 (1987) が，この講座の冒頭で述べているように，パーソナル・コンピュータの爆発的普及に伴って，からくりについて，あるいは計算のやりかたについてさえもユーザーはつんぼさじきに置かれているというのが現状ではないかと思われる。その点，ますますユーザーが意識的に学習する必要性が高まっているのではないだろうか。「見て，利用する」というのはあくまで「慣れる」段階であるくらいに思っていただきたい。

I　ノンパラメトリックとは

ノンパラメトリック統計法 (Non-parametric statistical method, Parameter-(Distribution-) free statistical method と書かれる場合もある。以後「ノンパラメトリック法」と呼ぶ）は文字どおりには，母数 (Parameter) によらない，あるいは分布 (Distribution) によらない検定法，ということである。それに対して，分布や母数による方法として，パラメトリック統計法と目される，広い意味での分散分析法がある（以後「分布による方法」と呼ぶ)。統計検定に広く使用されている，t 検定とか F 検定もその中に含まれる。ノンパラメトリック法とは異なり，標本が属する母集団が正規分布などの理論「分布」に当てはまることを仮定するため，平均とか分散といった，「母数」の推定を行うのである。

前記のソーカルとロルフ (1973) には「分散分析法に代わるノンパラメトリック法」という言いかたがされている。「代わる」ということばは，

① 分散分析法（分布による方法）は，優れた統計的手法であるが，それを使用できない場面がある。

② その場合の対策の一つとして，ノンパラメトリック法の利用があり，分布による方法よりも優れたいくつかの特色を持っている。

ということだと解釈される。

II　ノンパラメトリック法の特色
—分布による方法が使えない場面—

ノンパラメトリック法は，母集団の分布を仮定しないことにより，分布による方法より優れた点がある（もちろん，欠点はある)。

一つはその適用範囲の広さである。ノンパラメトリック法に属する多くの検定法は，標本値の絶対的な大きさがわかっている「間隔」や「比率」データのみならず，「順位」データのように相対的な関係しかわからない場合にも適用できる。それは，後で述べる多くの検定法がデータの値の大きさを無視して，大小関係のみを問題にするためである。さらにいくつかの検定法では，大小関

Statistics for Pest and Disease Control (6) Non-parametric Statistical Method.　By Kazuyuki Fujita

第1表　主なノンパラメトリック法の種類とそれに対応する分散分析法の種類（粕谷・藤田，1984）

目　　的	ノンパラメトリック法	分布による方法
2標本の比較	MANN-WHITNEY の U 検定（WILCOXON の順位和検定）	t 検定
（対応のある場合）	WILCOXON の符号化順位検定	対応2試料 t 検定
三つ以上の標本比較	KRUSKAL-WALLIS の検定	一元配置分散分析
（対応のある場合）	FRIEDMAN の検定	二元配置分散分析
2変数の相関	KENDALL の順位相関係数	積率相関係数

係のない「分類」データにも適用可能である。

二つめの特色は，計算の容易さである。コンピュータ・プログラムに組んでしまえば同じかもしれないが，計算がやさしいということは，この方法の原理が理解しやすいことの一つのあかしでもある。

三つめの特色は，「汚れた」データに対する頑健性(Robustness)である。つまり，検定を行うにあたって，データに対してうるさい条件を言わないのである。

ある処理の効果を調べるため，処理区と対照区，あるいは各処理区間の値の違いを検定するためには，t 検定を用いるのが通常のやりかたであると思われている。しかし，「君のデータでは t 検定に合わないから止めたほうがいいよ」と，統計に詳しい人から言われ，何を指摘されているのかがよく理解できなかった経験を持つ読者も多いのではないか。分布による方法を適用するにあたっては，以下の条件が満たされなければならないので，実際にどれかの条件をクリアーしていない汚れたデータだったと考えられる。むろん，標本が無作為に抽出されていることが客観的に認められることが検定を行うための大前提となることは言うまでもない。

① 分布の正規性：集められたデータが，正規分布をしている母集団からの標本とは認められないと判断されれば，分布による方法は使えない。

② 等分散性：推定した，おのおのの標本の分散が，検定の結果，等しくないと判断されれば次には進めない。

③ 効果の加法性：ある処理を行った標本値は対照区の標本値にある値を加えた（正でも負の値でもよい）と考えられない場合も検定はできない。処理の乗法性が考えられる場合，すなわちある処理によって値は何倍になると考えられるときには使用できないことになる。

ノンパラメトリック法を採用するのはいいのだけれど，上の条件に当てはまるデータ（もちろんデータが絶対的な大きさで表されている，間隔，比率データ）に対して分布による方法とノンパラメトリック法の検出力（検定したい仮説—対立仮説を採用する確率）に差があるのではないかという心配が生じる。値の大小関係にだけ着目して，順位データに「落とす」という作業で情報量を減らしているノンパラメトリック法の場合，分布の位置の違いに関して分布による方法ほどの検出力はないのは当然である。しかし，それによってわたしたちが利用する際，不都合が生じなければいいのであって，実用上も問題がないとされている（石居，1975）。検出力の高い方法が，それゆえに厳しい使用条件があることを考えれば，より広い範囲でノンパラメトリック法の使用が奨励されてもよいと思われる。

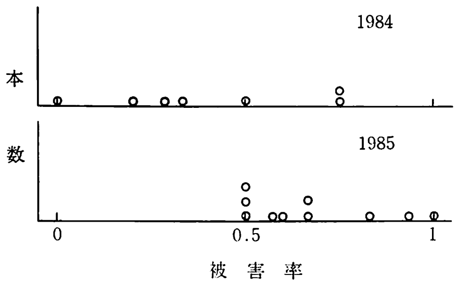
第1表には，よく使われるノンパラメトリック法の検定法の種類とそれに対応する分布による方法を示した。ここに挙げたノンパラメトリック法はいずれも，「ならべかえ」とか「順位」による方法（詳細は後述）であり，それぞれもっとも単純な対立仮説に対応する方法である。このほかにも，検定を行おうとする対立仮説によっては，より厳しい使用条件を持つものがある（詳細は，例えば，柳川，1982 を参照されたい)。

III ノンパラメトリック法の計算例
—WILCOXON の（順位和）検定—

日本の造林地の多くはスギ，ヒノキ林であり，近年材質劣化を起こすスギカミキリの被害が全国的にクローズ・アップされ，防除を目指した研究が進められている（小林・柴田，1985)。1年一化のスギカミキリ幼虫の死亡率は林分ごとあるいは年ごとに変動が大きく，その要因の一つとして雨量に関係したスギのヤニの浸出量が指摘されている（雨が多い年はヤニが多く，そのためにヤニにまかれて死亡する幼虫の割合が高いと考えられている)。

第1図は野淵ら（1987）が示したデータで，1984，85年に茨城県千代田村の林業試験場千代田試験地のスギに人工的に接種されたスギカミキリ1齢幼虫で，スギ粗皮内にせん入できた個体のうち粗皮内で死亡した割合を木ごとに見たものである（1984 年7本，85 年 10 本)。

ここでは 1984，85 年の死亡率の差の有意性を見いだしたい（雨量の多い 85 年の死亡率が 84 年のそれよりも高いと言いたい）のであるが，第1図を一見して，先



第1図 スギカミキリ幼虫のせん入後の粗皮下死亡率 (野淵ら, 1987)

に述べた, 分布による方法における正規性, 等分散性の仮定はとてもクリアーしそうもない, と感じられる (もちろん, 厳密には検定を行わなければならない。その方法ついては, 例えば柴田 (1981) などを参照されたい)。

分布による方法が使えないとなれば, 方策はとりあえず二つほど考えられる。一つは, 仮定を満足すべく変数変換を繰り返しながら, 分布による方法をなんとかして使おうとするやりかた, もう一つが, ノンパラメトリック法 (この場合, MANN-WHITNEY の方法, あるいは WILCOXON の順位和検定) を使うやりかたである。本稿の本題から外れる変数変換については, 統計学書を参照していただきたい。

後者のノンパラメトリック法であるが, ここでは WILCOXON の (順位和) 検定を説明したい。MANN-WHITNEY の方法も本質的にはまったく同じであるが, 計算のやりかたが若干異なる (詳しくは, ソーカルとロルフ (1973), 粕谷と藤田 (1984) などを参照されたい)。どちらを使うかは, いま手もとにどんな数表があるかによる。もし, WILCOXON 検定のための数表が見つからない場合は, この方法をやめて, MANN-WHITNEY の方法 (これも, 数表が見つかればの話) を採用すればよい。どちらにしても, 数表なしで検定するのは, やってできないことはないが, 骨の折れる仕事である。また, 計算もできるかぎり数表が利用しやすい手順で行うのが労力もかからない。例えば, 野淵ら (1987) は, 1984 年に 7 本, 85 年に 10 本調べたが, このままだと, 数表が使いづらいので (前者のほうが標本数が多ければそのまま数表を使うことができる), 計算時の混乱を避けるためにも, 初めから 85 年のデータを先に持ってきたほうがよい。本稿は柳川 (1982) の巻末の数表に従って計算を行う。

(順位による検定の考えかた)

第2表に計算に使用する数値を示した。85 年の死亡率, x の分布関数を $F(x)$, 84 年の死亡率, y の分布関数を $G(y)$ とする。ここでは, 85 年の死亡率が高いことが言いたいので, 帰無仮説 $H_0: F=G$ の対立仮説 $H_1: F>G$ に対する検定を行う。第2表に示したように, 観測値, $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ の小さいものから付けた順位を $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_m, s_1, s_2, \cdots\cdots, s_n (m=10, n=7)$ とする。

第2表 検定例に用いる数値 (野淵ら, 1987 を計算の都合上一部改編)

i	1985 年			1984 年		
	死亡数/せん入数	x_i	r_i	死亡数/せん入数	y_i	s_i
1	10/12	0.833	15	0/7	0	1
2	5/10	0.5	6	2/6	0.333	4
3	4/ 6	0.667	12.5	2/7	0.286	3
4	3/ 5	0.6	9	5/8[a]	0.625	10.5
5	6/ 9	0.667	12.5	3/4	0.75	14
6	4/ 7	0.571	8	1/5	0.2	2
7	2/ 4	0.5	6	5/8[b]	0.625	10.5
8	3/ 6	0.5	6			
9	3/ 3	1	17			
10	14/15	0.933	16			
計	$m=10$	$W_r=108$		$n=7$	$W_s=45$	

a) 本来の値は 4/8, b) 本来の値は 6/8

ここで, r_2, r_7, r_8 が, また s_4, s_7, そして r_3, r_5 が同じ値で, 同一順位である。同じ順位が F, G にまたがらない場合は, 計算のやりかたを変更する必要はない。また, 例えば r_2, r_7, r_8 に対しては 5, 6, 7 としても, 三つとも 6 $(=(5+6+7)/3)$ という順位を付けても検定の結果は変わらない。s_4, s_7 の場合とか r_3, r_5 の場合も同様で, おのおの 10, 11 あるいは 12, 13 という順位を付けても, それぞれを, 10.5, 10.5, 12.5, 12.5 としてもよい。今回は第2表のようにする。

問題は, 同一順位が F, G にまたがる場合で, 順位の付けかたは第2表のとおりでよいが, そのまま検定を進めていけば, 検出力が落ちることを覚悟しなければならない。それがいやなら, 正規近似を使った別の道筋を採用することになる (詳細は粕谷と藤田 (1984) を参照されたい)。

ここで, WILCOXON の方法のからくりの入門的部分を説明しよう。中学や高校時代に, 数学で順列組合せを習ったことは覚えていらっしゃるだろうか。この方法に限らず, 第1表に出てくるノンパラメトリックの方法は, 順列組合せそのものだと思っていただいて差し支えなく, 原理が理解しやすいと言ったのはそのためである。ただし, 同じノンパラメトリック法に分類されている検定法の中にも, 例えば, KOLMOGOROV-SMIRNOV 法などのように, まったく異なった発想から出発している方法もある。

第2表の順位を小さいものから並べると,

s_1, s_6, s_3, s_2, $\underline{r_2, r_7, r_8}$, r_6, r_4, $\underline{s_4, s_7}$, $\underline{r_3, r_5}$, s_5, r_1, r_{10}, r_9

となる。ただし,下線は同一順位を表す。また,x に属する 10 の順位 (r_1〜r_{10}) をすべて加えて,その値を W_r とすると,108 となる。同様に y (s_1〜s_7) について,総和を W_s とすると,45 となる。

17 個の文字をランダムに並べた場合,その並べかたは 17!(約 355 兆)とおりある。この検定法の考えかたの骨子は,この 17 個をランダムに並べたと仮定して,上のような並びかた,及びこの並びかたより 85 年のほうが高くなる並びかたが起こる確率(対立仮説を,85 年のほうが 84 年より高いとしているためである)を求めることである。標本値に「順位」を付けて,それらを「並べかえる」だけなのだから,正規分布も,またその母数でる平均も分散も出てこないのである。ノンパラメトリック法の中でももっとも単純な検定法が FISHER の並べかえ検定(正確確率検定)である。すべての並べかたのうち,条件に合う並べかたを一つ一つ丹念に見ていく方法で,標本数が限られていれば,有効な方法である。WILCOXON の方法も原理的には同じであるが,順位を使うこと,また数表を使って容易にできるようにくふうされている点で異なっているだけである。

上で述べた WILCOXON の方法の骨子は具体的には,17 個の文字をランダムに並べたという仮定のもとで,W_s が 45 以下になる並べかたが 17!とおりのうち,どれだけあり,その確率 (P_0) がどれだけかを調べることである。すなわち,

$$P_0(W_s \leqq 45) = P_0(W_r \geqq 108)$$

を求めることであり,この確率が有意確率である。有意確率は危険率とも呼ばれるが,これは,誤って帰無仮説を棄却して対立仮説を採用する危険の度合いを示しているためである。もし,ある判断基準によって,非常に起こりにくいと判断されるときには,帰無仮説を棄却して,対立仮説を採用しなければならない。その基準が有意水準である。特にどれだけにしなければならないという決まりがあるわけではなく,通常は 5% とか 1% に設定される。

(計算)

それでは,実際に検定を行ってみよう。なお,有意水準は 5% とする。ここで,求める有意確率が,

$$P_0(W_s \geqq T)$$

という形になっていれば,そのままでよいが,今回のように,

$$P_0(W_s \leqq 45)$$

という形になっている場合には,上のような形にしなければならない。

1) T を求める。 W_s の分布は H_0 の条件で,

$$n(m+n+1)/2 = 7 \times (10+7+1)/2 = 63$$

に関して対称である。だから,

$$63-45 = T-63$$

である T について,

$$P_0(W_s \leqq 45) = P_0(W_s \geqq T)$$

が成立する。これを利用すると,

$$T = (63-45)+63 = 81$$

となり,有意確率 $P_0(W_s \geqq 81)$ を求めればよいことになった。

2) 有意確率を求める。 数表で,$m=10$, $n=7$ の場合の有意確率を調べると,0.044 とある。すなわち,対立仮説 $H_1: F>G$ を採用した結果,それが誤りである危険率は 4.4% ということになる。有意水準を 5% と設定したので,この結果から,帰無仮説は棄却され,対立仮説が採用される。

さて,たいていの WILCOXON 検定のための数表は,$m \leqq 10$ かつ $n \leqq 10$ の場合であって,標本数がそれ以上の場合には使えない。その場合には,下の式によって W_s の分布が正規近似できることを利用して,P_0 の近似値を求めることになる。

$$P_0(W_s \geqq T) = 1-\Phi\left(\frac{T-n(m+n+1)/2-1/2}{\sqrt{mn(m+n+1)/12}}\right)$$

Φ は標準正規分布(平均 0,分散 1)の分布関数であり,たいていの統計学書に数表がある。

一見して,「なぜ,せっかくノンパラメトリック法を使ったのに,正規分布を使うのか,それならば,変数変換を使う分布による方法と同じではないか」と思われる方があるかもしれないが,この場合は,データの分布を正規変換したのではなく,あくまで,ノンパラメトリック法の枠の中で,W_s の分布について行っていることをご理解願いたい。

(問題点のまとめ)

他のノンパラメトリックな方法にも当てはまるが,標本数が多くなる場合,数表が膨大になることもあって,正規近似を使うことが一般的である。また,同一順位の個体が異なる標本にまたがる場合,正規近似で切り抜けている。そのため,標本数が小さい場合にはできれば,並べかえ検定を行うのが良策である(柳川,1982)。近似になれば,多少結論が弱くなるのはやむを得ず,他の方法(例えば,データの分布関数の正規変換)と天秤にかけなければならない場面も考えられる。

分布の位置の違いに関して WILCOXON の方法の検出力は分散分析にそれほど劣らず，実用上問題はないが，分布の形の違いには敏感ではない。二つの分布が違うことを言いたい，しかし分布関数の位置は変わらない，そんなときには，WILCOXON の方法のかわりに，同じくノンパラメトリック法でありながらまったく異なった検定法の，KOLMOGOROV-SMIRNOV の方法を使えばよい。

おわりに

草稿を読んでご意見をいただいた新潟大学教育学部粕谷英一博士に厚く御礼申し上げる。

以下に，ノンパラメトリック統計法に関する記述のある主な文献を挙げた。このうち，いくつかはコンピュータ・プログラムが掲載してあるが，BASIC，その他のプログラム言語を学習した人，これから学習するつもりの人は文献の記述にしたがって，是非ご自身でプログラミングされることをお勧めする。

参考文献

1) J. ハエック (1969)：(丘本　正・宮本良雄・古後楠徳訳)，ノンパラメトリック統計学，日科技連，東京，190 pp.
2) 石居　進 (1975)：生物統計学入門＝具体例による解説と演習＝，培風館，東京，290 pp.
3) 粕谷英一・藤田和幸 (1984)：動物行動学のための統計学 (伊藤嘉昭監修)，東海大学出版会，東京，131 pp.
4) 小林一三・柴田叡一 (1985)：スギカミキリの被害と防除法，分かりやすい林業研究解説シリーズ No. 77，林業科学技術振興所，東京，88 pp.
5) E. L. レーマン (1975)：(鍋谷清治・刈谷武昭・三浦良造　訳)，ノンパラメトリックス―順位にもとづく統計的方法―，森北出版，東京，484 pp.
6) 宮井俊一 (1987)：植物防疫　41：70～73.
7) 野淵　輝ら (1987)：98 回日林論 (印刷中).
8) 柴田義貞 (1981)：正規分布―特性と応用―，東大出版会，東京，322 pp.
9) S. ジーゲル (1956)：藤本熙　訳)，ノンパラメトリック統計学―行動科学のために―，マグロウヒルブック，東京，344 pp.
10)) R. R. ソーカル・F. J. ロルフ (1973)：(藤井宏一　訳) 生物統計学，共立出版，東京，449 pp.
11) 柳川　堯 (1982)：ノンパラメトリック法，培風館，東京，259 pp.